**Методы оптимизации и исследование операций**

**1. Дифференцируемые функционалы. Производная по направлению,** **по Лагранжу, Гато и Фреше. Экстремум дифференцируемых** **функционалов. Единственность производной Фреше. Принцип Ферма** **и сопутствующие утверждения.**

**Дифференцируемые функционалы**

**Функционал** — это отображение F: X → ℝ, где X — некоторое функциональное пространство. Функционал ставит в соответствие функции число.

**Производные функционалов**

**Производная по направлению**: Приращение функционала F[x + αh] - F[x] при α → 0 пропорционально α с коэффициентом δF[x, h], который называется вариацией функционала:   
lim(α→0) (F[x + αh] - F[x])/α = δF[x, h]  
**Производная по Лагранжу (первая вариация)**: Основной инструмент вариационного исчисления, определяется как линейная часть приращения функционала:   
δF[x; h] = d/dα F[x + αh]|α=0  
**Производная Гато**: Обобщение понятия производной на функциональные пространства:   
δF[x; h] = lim(α→0) (F[x + αh] - F[x])/α, если этот предел существует.  
**Производная Фреше**: Более сильное понятие дифференцируемости, требующее равномерной сходимости по всем направлениям:   
F[x + h] - F[x] = L[h] + o(||h||), где L[h] — линейный функционал, а o(||h||)/||h|| → 0 при ||h|| → 0.

**Единственность производной Фреше**

Если функционал F дифференцируем по Фреше в точке x, то его производная Фреше L[h] в этой точке единственна. Это следует из свойств линейности и непрерывности производной Фреше.

**Экстремум дифференцируемых функционалов**

Функционал F достигает экстремума в точке x₀, если для любого допустимого направления h значение функционала не улучшается при малых смещениях в этом направлении.

**Принцип Ферма**

**Принцип Ферма**: Если функционал F достигает экстремума в точке x₀ и дифференцируем в этой точке, то его первая вариация (производная по Лагранжу) равна нулю:

δF[x₀; h] = 0

для всех допустимых направлений h.

**Сопутствующие утверждения**:

1. Необходимое условие экстремума: если x₀ — точка локального экстремума и F дифференцируем по Фреше в x₀, то F'(x₀) = 0.

2. Если F'(x₀) ≠ 0, то x₀ не является точкой экстремума.

3. Обращение производной в ноль является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума.

**2. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления.**

**Основные леммы вариационного исчисления. Гладкость экстремали.**

**Вывод уравнения Эйлера для классической задачи вариационного** **исчисления. Специальные случаи уравнения Эйлера.**

**Постановка простейшей задачи вариационного исчисления**

Простейшая задача вариационного исчисления заключается в нахождении функции y = y(x), x ∈ [a, b], которая доставляет экстремум (минимум или максимум) функционалу:

J[y] = ∫ F(x, y, y')dx

при граничных условиях:

y(a) = A, y(b) = B

где F(x, y, y') — заданная функция, трижды непрерывно дифференцируемая по всем аргументам.

**Основные леммы вариационного исчисления**

1. **Лемма Дюбуа-Реймона**: Если функция p(x) непрерывна на [a, b] и∫ p(x)η(x)dx = 0 для любой функции η(x) с непрерывной производной, обращающейся в нуль на концах отрезка, то p(x) ≡ 0 на [a, b].

**2. Основная лемма вариационного исчисления**: Если для непрерывной функции g(x) на [a, b]∫ g(x)η(x)dx = 0 для любой непрерывной функции η(x), обращающейся в нуль на концах отрезка, то g(x) ≡ 0 на [a, b].

**Гладкость экстремали**

Экстремаль задачи вариационного исчисления обладает определенной гладкостью, которая зависит от гладкости подынтегральной функции F. Если F имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно, то экстремаль имеет непрерывные производные до порядка k+1.

**Вывод уравнения Эйлера**

Пусть y = y(x) — экстремаль функционала J[y]. Рассмотрим вариацию функционала в направлении η(x), где η(a) = η(b) = 0:

δJ[y; η] = d/dα J[y + αη]|α=0 = ∫ (∂F/∂y · η + ∂F/∂y' · η')dx

Интегрируя по частям второе слагаемое:

∫ ∂F/∂y' · η'dx = [∂F/∂y' · η] - ∫ d/dx(∂F/∂y') · ηdx = - ∫ d/dx(∂F/∂y') · ηdx

поскольку η(a) = η(b) = 0.

Тогда вариация функционала:

δJ[y; η] = ∫ (∂F/∂y - d/dx(∂F/∂y')) · ηdx

По принципу Ферма, δJ[y; η] = 0 для всех допустимых η. Применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение Эйлера:

∂F/∂y - d/dx(∂F/∂y') = 0

**Специальные случаи уравнения Эйлера**

1. **F не зависит явно от y**: F = F(x, y')

Уравнение Эйлера принимает вид:

d/dx(∂F/∂y') = 0

Это означает, что ∂F/∂y' = C (константа). Это первый интеграл уравнения Эйлера.

2. **F не зависит явно от x**: F = F(y, y')

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл:

F - y' · ∂F/∂y' = C

(Интеграл Бельтрами)

3. **F = F(x, y)** (нет зависимости от производной)

Уравнение Эйлера упрощается до:

∂F/∂y = 0

4. **F = G(y')** (зависит только от производной)

Уравнение Эйлера: ∂G/∂y' = C, что дает y' = const, то есть y = Cx + D, где C и D определяются из граничных условий.

**3. Уравнение Эйлера в многомерном случае.**

**Постановка задачи в многомерном случае**

В многомерном случае рассматривается функционал:

J[u] = ∫∫...∫ F(x₁, x₂, ..., xₙ, u, ∂u/∂x₁, ∂u/∂x₂, ..., ∂u/∂xₙ)dx₁dx₂...dxₙ

где интегрирование ведется по некоторой области D в ℝⁿ, а u = u(x₁, x₂, ..., xₙ) — искомая функция с заданными граничными условиями на границе области D.

**Вывод уравнения Эйлера в многомерном случае**

Аналогично одномерному случаю, рассматривается вариация функционала:

δJ[u; η] = ∫∫...∫ (∂F/∂u · η + ∂F/∂(∂u/∂x₁) · ∂η/∂x₁ + ... + ∂F/∂(∂u/∂xₙ) · ∂η/∂xₙ)dx₁dx₂...dxₙ

Применяя теорему о дивергенции к слагаемым с производными вариации и учитывая, что вариация η обращается в нуль на границе области, получаем:

δJ[u; η] = ∫∫...∫ [∂F/∂u - Σ ∂/∂x(∂F/∂(∂u/∂x))] · η dx₁dx₂...dxₙ

По аналогии с основной леммой вариационного исчисления, для произвольной вариации η выражение в квадратных скобках должно быть равно нулю, что приводит к уравнению Эйлера в многомерном случае:

∂F/∂u - Σ ∂/∂x(∂F/∂(∂u/∂x)) = 0

**Частные случаи**

**Уравнение Пуассона**: Если F = (1/2)Σ(∂u/∂x)² - fu, то уравнение Эйлера имеет вид: -Δu = f, где Δu = Σ ∂²u/∂x² — оператор Лапласа.

**Уравнение минимальной поверхности**: Для функционала площади поверхности: J[u] = ∫∫ √(1 + (∂u/∂x)² + (∂u/∂y)²)dxdy уравнение Эйлера выглядит как:

∂/∂x(∂u/∂x/√(1 + (∂u/∂x)² + (∂u/∂y)²)) + ∂/∂y(∂u/∂y/√(1 + (∂u/∂x)² + (∂u/∂y)²)) = 0

**Векторный случай**

Если искомая функция является вектор-функцией u = (u₁, u₂, ..., uₘ), то для каждой компоненты uⱼ имеем отдельное уравнение Эйлера:

∂F/∂uⱼ - Σ ∂/∂x(∂F/∂(∂uⱼ/∂x)) = 0, j = 1, 2, ..., m

**4. Постановка конечномерных задач без ограничений и с** **ограничениями типа равенств. Принцип Лагранжа. Необходимые и** **достаточные условия экстремума второго порядка.**

**Задачи без ограничений**

Рассматривается задача нахождения экстремума (минимума или максимума) функции f(x), где x ∈ℝⁿ, без каких-либо ограничений.

**Необходимые условия первого порядка**

Если точка x\* является локальным экстремумом функции f(x), и f дифференцируема в x\*, то градиент функции в этой точке равен нулю: ∇f(x\*) = 0

**Необходимые условия второго порядка**

Если точка x\* является локальным экстремумом функции f(x), и f дважды дифференцируема в x\*, то:

1. ∇f(x\*) = 0

2. Матрица вторых производных (гессиан) H(x\*) в точке x\* является:

◦ положительно полуопределенной для минимума

◦ отрицательно полуопределенной для максимума

**Достаточные условия второго порядка**

Пусть x\* — критическая точка функции f(x), т.е. ∇f(x\*) = 0, и f дважды дифференцируема в окрестности x\*.

Тогда:

1. Если гессиан H(x\*) положительно определен, то x\* — точка локального минимума

2. Если гессиан H(x\*) отрицательно определен, то x\* — точка локального максимума

3. Если гессиан H(x\*) имеет и положительные, и отрицательные собственные значения, то x\* — седловая точка

**Задачи с ограничениями типа равенств**

Рассматривается задача нахождения экстремума функции f(x), где x ∈ℝⁿ, при наличии m ограничений типа равенств:

g₁(x) = 0, g₂(x) = 0, ..., gₘ(x) = 0

или в векторной форме: g(x) = 0, где g: ℝⁿ → ℝ.

**Принцип Лагранжа**

Для решения задач с ограничениями вводится функция Лагранжа:

L(x, λ) = f(x) + λ₁g₁(x) + λ₂g₂(x) + ... + λₘgₘ(x) = f(x) + λg(x)

где λ = (λ₁, λ₂, ..., λₘ) — вектор множителей Лагранжа.

**Принцип Лагранжа (необходимые условия первого порядка)**: Если точка x\* является локальным экстремумом функции f(x) при ограничениях g(x) = 0, и в точке x\* выполнено условие регулярности ограничений (якобиан ∇g(x\*) имеет ранг m), то существует вектор множителей Лагранжа λ\* такой, что:

∇ₓL(x\*, λ\*) = 0 и g(x\*) = 0

**Необходимые и достаточные условия второго порядка для задач с ограничениями**

**Необходимые условия второго порядка**

Пусть x\* — точка локального экстремума функции f(x) при ограничениях g(x) = 0, и выполнены условия принципа Лагранжа. Тогда для любого вектора h такого, что ∇g(x\*)h = 0 (h принадлежит касательному пространству к множеству ограничений), выполняется:

h∇²ₓₓL(x\*, λ\*)h ≥ 0 для минимума

h∇²ₓₓL(x\*, λ\*)h ≤ 0 для максимума

где ∇²ₓₓL — матрица вторых производных функции Лагранжа по переменным x.

**Достаточные условия второго порядка**

Пусть выполнены условия принципа Лагранжа в точке (x\*, λ\*). Если для любого ненулевого вектора h такого, что ∇g(x\*)h = 0, выполняется:

h∇²ₓₓL(x\*, λ\*)h > 0, то x\* — точка локального минимума функции f(x) при ограничениях g(x) = 0.

Если же выполняется:

h∇²ₓₓL(x\*, λ\*)h < 0, то x\* — точка локального максимума.

**5. Задача Лагранжа. Постановка задачи. Теорема существования.**

**Необходимые условия оптимальности. Достаточные условия** **оптимальности.**

**Постановка задачи Лагранжа**

Задача Лагранжа — обобщение классической задачи вариационного исчисления, в которой требуется найти функцию y(x), x ∈ [a, b], доставляющую экстремум функционалу:

J[y] = ∫ F(x, y, y')dx

при наличии интегральных ограничений:

∫ G\_i(x, y, y')dx = l\_i, i = 1, 2, ..., m

и граничных условиях:

y(a) = A, y(b) = B

**Теорема существования**

**Теорема существования решения задачи Лагранжа**: Если функции F(x, y, y') и G\_i(x, y, y') непрерывны вместе со своими частными производными по y и y' до второго порядка включительно в области определения, и множество допустимых функций, удовлетворяющих ограничениям и граничным условиям, непусто и компактно в соответствующей топологии, то задача Лагранжа имеет решение.

**Необходимые условия оптимальности**

Для решения задачи Лагранжа вводится расширенный функционал:

Φ[y] = J[y] + λ₁(∫ G₁(x, y, y')dx - l₁) + ... + λₘ(∫ Gₘ(x, y, y')dx - lₘ)

где λ₁, λ₂, ..., λₘ — постоянные множители Лагранжа.

Этот функционал можно записать как:

Φ[y] = ∫ H(x, y, y')dx - Σλl

где H(x, y, y') = F(x, y, y') + Σλg(x, y, y') — функция Лагранжа (гамильтониан).

**Необходимые условия оптимальности**: Если функция y(x) является решением задачи Лагранжа, то существуют постоянные множители λ₁, λ₂, ..., λₘ, не все равные нулю одновременно, такие, что функция y(x) удовлетворяет уравнению Эйлера для расширенного функционала:

∂H/∂y - d/dx(∂H/∂y') = 0

или в развернутом виде:

∂F/∂y + Σλ∂G/∂y - d/dx(∂F/∂y' + Σλ∂G/∂y') = 0

**Достаточные условия оптимальности**

**Достаточные условия оптимальности для задачи Лагранжа**: Если функция y(x) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности с некоторыми множителями Лагранжа λ₁, λ₂, ..., λₘ, и вторая вариация расширенного функционала Φ[y] положительно (или отрицательно) определена, то y(x) доставляет локальный минимум (или максимум) исходному функционалу J[y] при заданных ограничениях.

Вторая вариация функционала Φ[y] имеет вид:

δ²Φ[y; η] = ∫ [∂²H/∂y² · η² + 2∂²H/∂y∂y' · η·η' + ∂²H/∂y'² · η'²]dx

Условие Лежандра для достаточности минимума требует:

∂²H/∂y'² > 0 для всех x ∈ [a, b]

Более сильное условие Якоби связано с отсутствием сопряженных точек на интервале [a, b].

**6. Задача с подвижными концами. Необходимое условие экстремума.**

**Условие трансверсальности.**

**Постановка задачи с подвижными концами**

В задаче с подвижными концами граничные условия заданы не конкретными значениями функции, а некоторыми кривыми или поверхностями. Рассматривается функционал:

J[y] = ∫ F(x, y, y')dx

где границы интервала [a, b] могут быть фиксированными или подвижными, а значения функции y(x) на границах могут принадлежать заданным кривым:

x = a, y ∈ N₁

x = b, y ∈ N₂

где N₁, N₂ — заданные кривые или поверхности.

**Необходимое условие экстремума**

Основным необходимым условием экстремума остается уравнение Эйлера:

∂F/∂y - d/dx(∂F/∂y') = 0

которое должно выполняться внутри интервала [a, b].

**Условие трансверсальности**

В зависимости от того, какие концы являются подвижными, формулируются различные условия трансверсальности.

**Случай 1: Правый конец подвижен вдоль кривой y = g(x)**

В этом случае условие трансверсальности имеет вид:

[F - y'·∂F/∂y']ₓ₌ = 0

или

[F - y'·∂F/∂y' + ∂F/∂y'·g'(x)]ₓ₌ = 0

**Случай 2: Оба конца подвижны вдоль вертикальных прямых x = a и x = b**

Условия трансверсальности:

[∂F/∂y']ₓ₌ₐ = 0

[∂F/∂y']ₓ₌ = 0

**Случай 3: Оба конца подвижны вдоль заданных кривых**

Если левый конец подвижен вдоль кривой y = g₁(x), а правый — вдоль y = g₂(x), то условия трансверсальности:

[F - y'·∂F/∂y' + ∂F/∂y'·g₁'(x)]ₓ₌ₐ = 0

[F - y'·∂F/∂y' + ∂F/∂y'·g₂'(x)]ₓ₌ = 0

**Общая формулировка условия трансверсальности**

В общем случае, если конец подвижен вдоль кривой, заданной уравнением φ(x, y) = 0, условие трансверсальности имеет вид:

[∂F/∂y' · δx - (F - y'·∂F/∂y') · δy]ₓ₌концевая\_точка = 0

где δx и δy связаны соотношением:

∂φ/∂x · δx + ∂φ/∂y · δy = 0

Геометрически условие трансверсальности означает, что экстремаль должна пересекать граничную кривую под прямым углом (быть трансверсальной к ней), если граничная кривая не является естественной границей для

данного функционала.

**7. Условия второго порядка. Сильный и слабый экстремум.**

**Необходимое условие Лежандра.**

**Виды экстремумов в вариационном исчислении**

В вариационном исчислении различают несколько видов экстремумов:

**1. Слабый экстремум**: Функция y₀(x) доставляет слабый экстремум функционалу J[y], если существует такое ε > 0, что J[y₀] ≤ J[y] (для минимума) или J[y₀] ≥ J[y] (для максимума) для всех допустимых функций y(x), удовлетворяющих условию: max|y(x) - y₀(x)| < ε и max|y'(x) - y₀'(x)| < ε, то есть, функция и ее производная должны мало отличаться от экстремали.

**2. Сильный экстремум**: Функция y₀(x) доставляет сильный экстремум функционалу J[y], если существует такое ε > 0, что J[y₀] ≤ J[y] (для минимума) или J[y₀] ≥ J[y] (для максимума) для всех допустимых функций y(x), удовлетворяющих только условию: max|y(x) - y₀(x)| < ε, то есть, только функция должна быть близка к экстремали, а ее производная может существенно отличаться.

**Условия второго порядка**

Для анализа характера экстремума в вариационном исчислении используются условия второго порядка, связанные со второй вариацией функционала.

Вторая вариация функционала J[y] = ∫ F(x, y, y')dx имеет вид:

δ²J[y; η] = ∫ [Fₚₚ·η'² + 2Fₚₛ·η'η + Fₛₛ·η²]dx

где Fₚₚ = ∂²F/∂y'², Fₚₛ = ∂²F/∂y'∂y, Fₛₛ = ∂²F/∂y², а η(x) — допустимая вариация, обращающаяся в нуль на концах интервала.

**Необходимое условие Лежандра**

**Необходимое условие Лежандра**: Если функция y₀(x) доставляет слабый экстремум (минимум или максимум) функционалу J[y], то для всех x ∈ [a, b] должно выполняться условие:

Fₚₚ(x, y₀(x), y₀'(x)) ≥ 0 для минимума

Fₚₚ(x, y₀(x), y₀'(x)) ≤ 0 для максимума

Если хотя бы в одной точке интервала [a, b] условие Лежандра нарушается, то функция y₀(x) не может быть экстремалью.

Если для всех x ∈ [a, b] выполняется строгое неравенство:

Fₚₚ(x, y₀(x), y₀'(x)) > 0

то говорят, что выполнено усиленное условие Лежандра.

**Усиление необходимых условий**

Условие Лежандра является лишь необходимым условием слабого экстремума. Для более полного анализа используются также:

1. **Условие Якоби**: Связано с отсутствием сопряженных точек на интервале [a, b].

2. **Условие Вейерштрасса**: Необходимое условие сильного экстремума, связанное с функцией Вейерштрасса:

E(x, y, p, q) = F(x, y, q) - F(x, y, p) - (q - p)·∂F/∂y'(x, y, p)

**Достаточные условия экстремума**

Для того чтобы функция y₀(x), удовлетворяющая уравнению Эйлера, доставляла минимум функционалу J[y], достаточно, чтобы:

1. Выполнялось усиленное условие Лежандра: Fₚₚ > 0 на [a, b]

2. Не было сопряженных точек на [a, b] (условие Якоби)

3. Функция Вейерштрасса E(x, y₀, y₀', q) ≥ 0 для всех допустимых q (для сильного минимума)

**8. Уравнение Якоби и свойства его решений. Сопряженные точки.**

**Свойство знакопостоянства второй производной.**

**Уравнение Якоби**

Уравнение Якоби возникает при исследовании второй вариации функционала и играет ключевую роль в определении достаточных условий экстремума в вариационном исчислении.

Для функционала J[y] = ∫ F(x, y, y')dx и экстремали y₀(x) уравнение Якоби имеет вид:

d/dx[Fₚₚ(x)·u'] - Fₚₛ(x)·u' + Fₛₚ(x)·u' - Fₛₛ(x)·u = 0

или в более компактной форме:

(Fₚₚ·u')' - Fₚₛ·u' - Fₛₚ·u' + Fₛₛ·u = 0

где u = u(x) — искомая функция, а Fₚₚ, Fₚₛ, Fₛₚ, Fₛₛ вычисляются на экстремали y₀(x).

**Свойства решений уравнения Якоби**

**Линейность**: Уравнение Якоби — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому его общее решение представляется в виде: u(x) = C₁u₁(x) + C₂u₂(x), где u₁(x) и u₂(x) — линейно независимые частные решения.

**Тривиальное решение**: Одним из решений уравнения Якоби всегда является функция u₁(x) = y₀'(x), где y₀(x) — экстремаль исходного функционала.

**Осцилляционные свойства**: Для многих задач решения уравнения Якоби имеют осцилляционный характер, что важно для определения сопряженных точек.

**Сопряженные точки**

**Сопряженные точки** — это точки, в которых нетривиальное решение уравнения Якоби, обращающееся в нуль в одной из них, также обращается в нуль.

Формально: точка c ∈ (a, b] называется сопряженной к точке a, если существует нетривиальное решение u(x) уравнения Якоби такое, что u(a) = u(c) = 0.

**Теорема Якоби**

**Теорема Якоби (необходимое условие)**: Если функция y₀(x) доставляет слабый экстремум функционалу J[y], то на интервале (a, b) не должно быть точек, сопряженных к точке a.

**Усиленная теорема Якоби (достаточное условие)**: Если функция y₀(x) удовлетворяет уравнению Эйлера, выполнено усиленное условие Лежандра (Fₚₚ > 0), и на интервале [a, b] нет точек, сопряженных к точке a, то y₀(x) доставляет слабый минимум функционалу J[y].

**Свойство знакопостоянства второй производной**

Для функционала простейшего вида J[y] = ∫ F(y')dx, где F зависит только от производной, условие Лежандра принимает вид:

F''(y') ≥ 0 для минимума

F''(y') ≤ 0 для максимума

В этом случае вторая вариация функционала имеет вид:

δ²J[y; η] = ∫ F''(y')·η'²dx

Если F''(y') > 0 на всем отрезке [a, b], то вторая вариация положительна для любой ненулевой вариации η(x), удовлетворяющей граничным условиям. Это означает, что экстремаль доставляет функционалу минимум.

Аналогично, если F''(y') < 0 на всем отрезке [a, b], то экстремаль доставляет функционалу максимум.

Таким образом, свойство знакопостоянства второй производной функции F по y' является важным критерием при определении характера экстремума в задачах вариационного исчисления.